Corrigé de l'épreuve de mathématiques BTS industriels Groupement C – Juin 2009

Exercice 1 *(10 points)*

Partie A : Résolution d'une équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 3$

1. Déterminer une solution constante de l'équation (E)
   La solution constante évidente est : $\boxed{y = 3}$ (car alors on a $y' = 0$ et $y'' = 0$)
2. Résoudre l'équation (E).
   L'équation caractéristique associée à (E) est : $r^2 + 2r + 1 = 0$
   Cette équation ne possède qu'une seule solution : $r = -1$ (le discriminant Δ est nul)
   On sait qu'alors, la solution générale de l'équation sans second membre est donnée par la formule $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$
   Ici, la variable est non pas t mais x et la solution générale de l'équation sans second membre $y'' + 2y' + y = 0$ est donc :
   $$y = (\lambda x + \mu)e^{-x}$$
   On sait que la solution générale de l'équation complète (E) s'obtient en ajoutant la solution particulière obtenue à la question 1 à la solution générale de l'équation sans second membre.

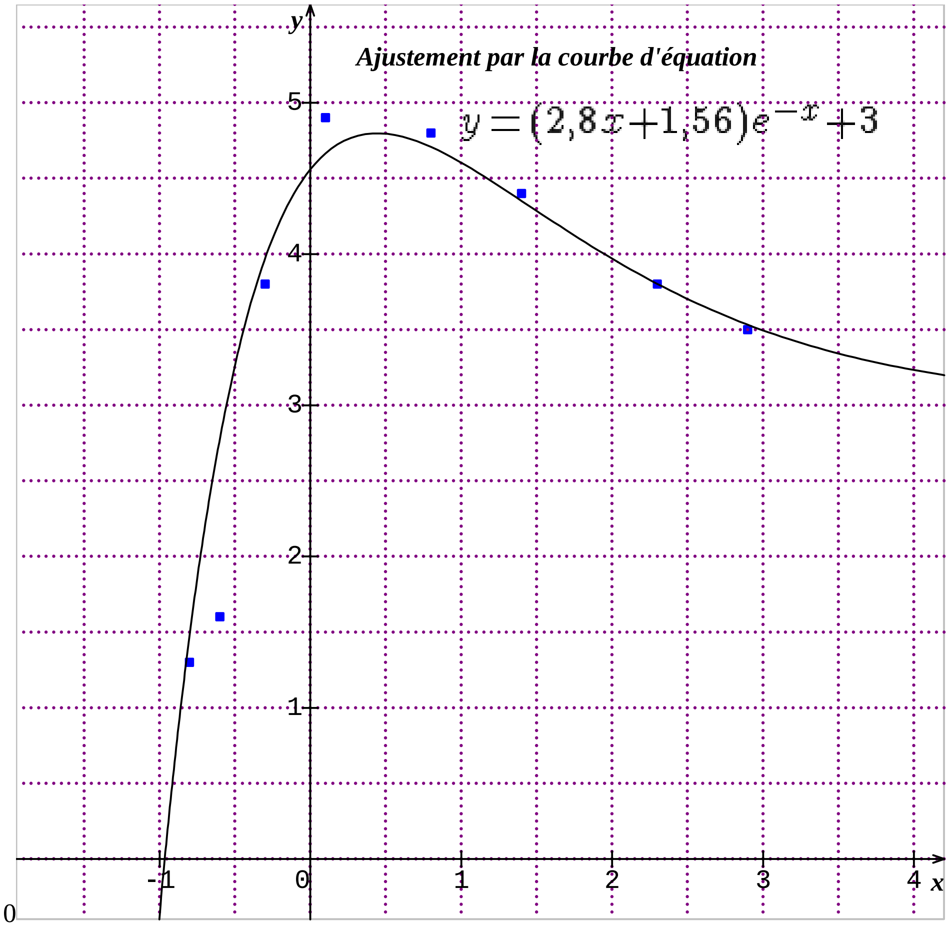
   Donc la solution générale de l'équation (E) est : $\boxed{y = (\lambda x + \mu)e^{-x} + 3}$.
3. En utilisant les propriétés graphiques de la courbe de f, déterminer la solution particulière f de (E).
   La fonction f est donc de la forme : $f(x) = (\lambda x + \mu)e^{-x} + 3$.
   On peut remarquer que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point de coordonnées (0 ; 5).
   On a donc $f(0) = 5$
   Donc $\mu + 3 = 5$
   Donc $\mu = 2$
   Par ailleurs, la fonction f a un maximum en ce point et la tangente en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.
   On en déduit que $f'(0) = 0$
   Or $f'(x) = \lambda e^{-x} + (\lambda x + \mu)\left(-e^{-x}\right)$
   Donc $\lambda + \mu(-1) = 0$
   Donc $\lambda - 2 = 0$
   Donc $\lambda = 2$
   L'expression de $f(x)$ est donc : $\boxed{f(x) = (2x + 2)e^{-x} + 3}$.

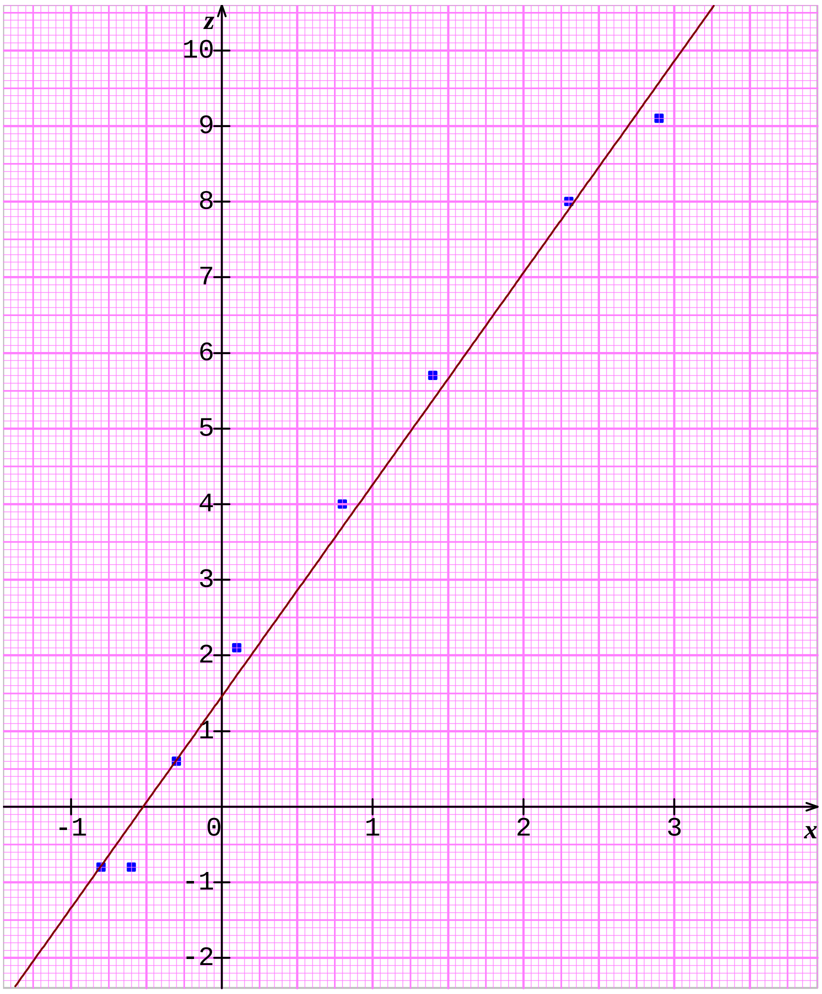
Partie B : Étude statistique

1. Compléter le tableau donné en annexe avec les valeurs de z arrondies au dixième.

x	2,3	1,4	-0,6	2,9	-0,3	-0,8	0,8	0,1
y	3,8	4,4	1,6	3,5	3,8	1,3	4,8	4,9
$z = (y-3)e^x$	8,0	5,7	-0,8	9,1	0,6	-0,8	4,0	2,1

2. Construire sur papier millimétré le nuage de points de coordonnées $(x\ ;\ z)$. Que peut-on observer ?
   On peut observer que les points sont suffisamment alignés pour qu'on puisse envisager un ajustement affine.
   Voir la construction page suivante…
3. Déterminer une équation de la droite de régression de z en x ainsi que le coefficient de corrélation linéaire de z en x.
   À la calculatrice, on obtient l'équation : $\boxed{z = 2{,}80x + 1{,}56}$
   Le coefficient de corrélation linéaire est : $\boxed{r \text{ ó } 0{,}996}$
4. Le nuage de points peut-il être ajusté par une courbe représentant une solution de l'équation (E) ?
   On a : $z = 2{,}80x + 1{,}56$
   Donc $(y-3)e^x = 2{,}80x + 1{,}56$
   Donc $y - 3 = (2{,}80x + 1{,}56)e^{-x}$
   Donc $\boxed{y = (2{,}80x + 1{,}56)e^{-x} + 3}$
   Cette équation est bien celle d'une courbe représentant une solution de (E) puisqu'elle est de la forme $y = (\lambda x + \mu)e^{-x} + 3$.
   Cet ajustement est par ailleurs meilleur que celui qui est proposé en annexe…en tout cas, c'est le meilleur ajustement possible obtenu par la méthode des moindres carrés en faisant le changement de variable donné.





Construction du nuage de points (x ; z) (partie B, question 2)

Exercice 2

Partie A

Le nombre de clients qui, dans un échantillon de 60 clients, ont attendu plus de 8 minutes, est une variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(60 ; 0,05)$.

Cette variable Y peut être approchée par une variable Z qui suit une loi de Poisson.
L'espérance de Y est donnée par la formule $E(Y) = np$. Donc, ici, $E(Y) = 60 \times 0,05 = 3$.

Le paramètre de la loi de Poisson est donc $\boxed{\lambda = 3}$.

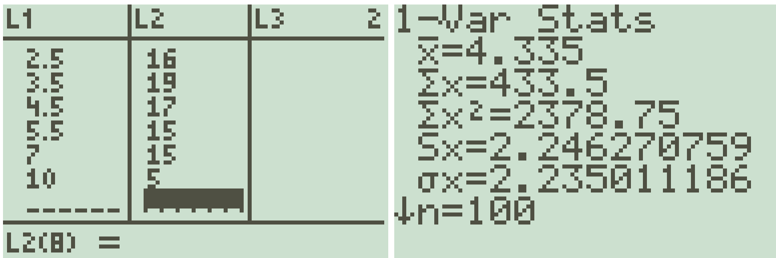
Calculer, avec la variable Z, une estimation de la probabilité qu'au moins 6 clients attendent plus de 8 minutes.
On a : $p(Z \geq 6) = 1 - p(Z < 6)$

$$= 1 - \left(1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!}\right)e^{-3}$$

$$\boxed{p(Z \geq 6) \approx 0,08}$$

Partie B

1. Calcul de la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon.
   À la calculatrice on obtient : $\boxed{\bar{x} = 4,34}$



2. Construction d'un test unilatéral pour déterminer si le temps d'attente moyen n'est pas supérieur à 4 minutes.

   a) L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 4$. Donc l'hypothèse alternative est $H_1 : \mu > 4$

   b) Sous l'hypothèse nulle, la variable $\bar{X}$ suit la loi $\mathcal{N}(4 ; 0,24)$.
   Recherchons l'écart critique au risque de 5 %, c'est-à-dire le nombre h tel que $P\left(\bar{X} \leq 4 + h\right) = 0,95$:

   Posons $X = \dfrac{\bar{X} - 4}{0,24}$. On sait qu'alors X suit la loi normale centrée réduite et on peut alors utiliser la table de la fonction de répartition Π de la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$:

   On peut écrire : $P\left(\bar{X} \leq 4 + h\right) = 0,95 \iff P\left(X \leq \dfrac{h}{0,24}\right) = 0,95$

   $\iff \Pi\left(\dfrac{h}{0,24}\right) = 0,95$

   $\iff \dfrac{h}{0,24} = 1,645$

   $\iff h \approx 0,40.$

   c) Règle de décision du test :
   Si, dans un échantillon de taille 100, la moyenne $\bar{x}$ reste dans inférieure à 4,40, alors on accepte l'hypothèse H_0 et on rejette H_1 : le temps d'attente moyen n'est pas, au risque de 5 %, supérieur à 4 minutes.
   Si, dans un échantillon de taille 100, la moyenne $\bar{x}$ est supérieure au seuil critique de 4,40 minutes, alors on rejette l'hypothèse H_0 et on accepte l'hypothèse H_1.

   d) Dans notre échantillon, la moyenne calculée est $\bar{x} = 4,34$. Comme elle est inférieure au suil critique, on peut accepter l'hypothèse H_0.