

Exercice 1 (11 points)

A – Équation différentielle.

On considère l'équation différentielle (E) suivante, où y désigne une fonction de la variable réelle x , définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et où \ln désigne la fonction logarithme népérien :

$$(E) : xy' - y = \ln x.$$

1. Résoudre, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, l'équation différentielle : $xy' - y = 0$.
2. Vérifier que la fonction h , définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = -\ln x - 1$, est une solution particulière de (E).
En déduire l'ensemble des solutions de (E).
3. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(1) = 1$.

B – Étude d'une fonction.

Soit la fonction f , définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2x - 1 - \ln x$.

1. Déterminer la limite de f en 0 et montrer que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.
2. Calculer la fonction dérivée f' de f . En déduire les variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

C – Représentation graphique ; calcul d'aire.

On note C la courbe d'équation $y = f(x)$ dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

1. Étudier la position de C par rapport à la droite D d'équation : $y = 2x - 1$.
2. Tracer la partie de la courbe C pour $0 < x \leq 3$ ainsi que la droite D. (unité graphique : 4 cm)
3. a) Vérifier que la fonction $H : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive sur l'intervalle $]0; +\infty[$ de la fonction $x - \ln x$.
b) Représenter sur le graphique le domaine délimité par la courbe C, la droite D et les droites Δ et Γ d'équations respectives : $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.
c) Calculer, en cm^2 , l'aire de ce domaine. (On en donnera une valeur décimale approchée par excès à 10^{-2} près).

Exercice 2 (9 points)

Les parties **A** et **B** sont indépendantes. On donnera les résultats numériques à 10^{-2} près.

Une usine fabrique des billes métalliques. L'étude porte sur le diamètre de ces billes, mesuré en millimètres.

A – Étude de la production.

1. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque bille prise au hasard dans la production de l'usine, associe son diamètre mesuré en millimètres.

On admet que X suit une loi normale de moyenne 25 et d'écart type 0,44.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « le diamètre de la bille est inférieur à 25,2 »

E_2 : « le diamètre de la bille est compris entre 24,1 et 25,9 ».

2. Certaines billes sont défectueuses. On admet que la probabilité de tirer au hasard une bille défectueuse est égale à 0,04.

Les billes sont conditionnées par paquets de 150. On admet que le choix d'un paquet peut être assimilé à un tirage avec remise de 150 billes.

On note Y la variable aléatoire qui associe à tout paquet choisi au hasard le nombre de billes défectueuses du paquet.

a) Justifier que Y suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b) On admet que la loi de Y peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre λ . Calculer la valeur de λ et déterminer la probabilité de l'événement E_3 : « Il y a au plus 4 billes défectueuses dans le paquet ».

B – Commande d'un client.

Un client réceptionne une commande. Il prélève un échantillon de 125 billes choisies au hasard et avec remise dans le lot reçu et constate que le diamètre moyen est égal à 25,1.

On rappelle que pour les billes fabriquées par l'entreprise, la variable aléatoire X qui prend pour valeurs leurs diamètres suit une loi normale d'écart type 0,44.

L'entreprise s'est engagée à ce que la moyenne des diamètres des billes fournies soit de 25.

Le client décide de construire un test bilatéral permettant de vérifier l'hypothèse selon laquelle le diamètre des billes du lot reçu est de 25.

1. Quelle est l'hypothèse nulle H_0 ? Quelle est l'hypothèse alternative H_1 ?
2. On désigne par \bar{X} la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 125 billes, prises au hasard et avec remise, associe la moyenne des diamètres obtenus.
 - a) Donner sous l'hypothèse nulle la loi de \bar{X} . En préciser les paramètres.
 - b) Déterminer le nombre a tel que $p(25 - a < \bar{X} < 25 + a) = 0,95$.
 - c) Énoncer la règle de décision du test.
3. Au vu de l'échantillon, au risque de 5%, que peut conclure le client sur le respect de l'engagement de l'entreprise?